JOURNAL OF DIFFERENTIAL EQUATIONS 44, 460–481 (1982)

Conditions nécessaires d'hypoanalyticité pour des opérateurs invariants à gauche homogènes sur un groupe nilpotent gradué

BERNARD HELFFER

Université de Nantes, Institut de Mathématiques et d'Informatique, 44072 Nantes Cedex, France

Received April 10, 1981

1. INTRODUCTION—RAPPELS

Soit G un groupe nilpotent connexe, simplement connexe dont l'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ admet une décomposition de la forme:

$$\mathscr{G} = \mathscr{G}_1 \oplus \cdots \oplus \mathscr{G}_r, \tag{1.1}$$

avec

$$\begin{aligned} [\mathscr{G}_i, \mathscr{G}_j] &\subset \mathscr{G}_{i+j} && \text{si} \quad i+j \leqslant r, \\ [\mathscr{G}_i, \mathscr{G}_j] &= 0 && \text{si} \quad i+j > r. \end{aligned}$$

r est appelé le rang de nilpotence du groupe. On posera

$$\mathscr{G}^i = \sum_{j=i}^{r} \mathscr{G}_j.$$

$\mathscr{G}$ est munie d'une famille de dilatations δ_t définie par:

$$\delta_t(X) = t^j X \qquad \text{pour } X \text{ dans } \mathscr{G}_j. \tag{1.2}$$

δ_t se prolonge naturellement à l'algèbre enveloppante $\mathscr{U}(\mathscr{G})$. On désignera par $\mathscr{U}_m(\mathscr{G})$ le sous-espace de $\mathscr{U}(\mathscr{G})$ des opérateurs homogènes d'ordre m. On se propose d'obtenir des conditions nécessaires d'hyponalyticité pour les opérateurs de $\mathscr{U}_m(\mathscr{G})$.

Rappelons tout d'abord le théorème suivant dû à Helffer–Nourrigat [9, 10] qui caractérise l'hypoellipticité des opérateurs de $\mathscr{U}_m(\mathscr{G})$.

0022-0396/82/060460–22$02.00/0

THÉORÈME 1.1. *Soit P dans* $\mathscr{U}_m(\mathscr{G})$ $(m > 0)$, *alors P est hypoelliptique si et seulement si*:

> *Pour toute représentation* π, *unitaire, irréductible, non triviale de* G, $\pi(P)$ *est injectif dans* $\mathscr{S}_\pi$ (*où* $\mathscr{S}_\pi$ *désigne l'espace des vecteurs* C^∞ *de la représentation*). (1.3)

La démonstration de ce théorème utilise, entre autre, la théorie de Kirillov [11] dont nous rappelons quelques éléments pour fixer certaines notations.

A tout élément ξ dans $\mathscr{G}^*$, on associe la forme bilinéaire B_ξ sur $\mathscr{G} \times \mathscr{G}$ qui est définie par:

$$B_\xi(x, y) = \xi([x, y]). \tag{1.4}$$

Soit V une sous-algèbre isotrope dans $\mathscr{G}$ pour B_ξ (i.e., $\xi([V, V]) = 0$) et soit $S = (S_1, \ldots, S_p)$ une famille de bons supplémentaires de V (cf. [10] pour la définition). Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p)$ dans S et a dans $\mathscr{G}$, on a la décomposition unique suivante:

$$e^{x_1} \cdot \cdots \cdot e^{x_p} \cdot e^a = e^{v(x,a)}\, e^{\sigma_1(x,a)} \cdot \cdots \cdot e^{\sigma_p(x,a)} \tag{1.5}$$

avec $v(x, a) \in V$, $\sigma(x, a) \in S$, où $a \to e^a$ désigne l'application exponentielle de $\mathscr{G}$ sur G.

On définit alors la représentation $\pi_{(\xi,V)}$ de G dans $L^2(S)$ par: $\forall f \in L^2(S)$, $\forall a \in \mathscr{G}$, $\forall x \in S$:

$$\pi_{(\xi,V)}(e^a) f(x) = e^{i\langle \xi, v(x,a)\rangle} f(\sigma(x, a)). \tag{1.6}$$

Lorsque V est maximale, la représentation $\pi_{(\xi,V)}$ est irréductible et sa classe d'équivalence (unitaire) ne dépend pas du choix de V.

Rappelons également que G agit dans $\mathscr{G}^*$ de la manière suivante: Pour ξ dans $\mathscr{G}^*$ et x dans $\mathscr{G}$, on définit $e^x \cdot \xi$ par:

$$\begin{aligned}\forall y \in \mathscr{G}, \langle e^x \cdot \xi, y\rangle &= \langle (\exp adx)^* \xi, y\rangle \\ &= \langle \xi, \exp(ad - x)\, y\rangle_{\langle \mathscr{G}^*, \mathscr{G}\rangle}.\end{aligned} \tag{1.7}$$

On dira que ξ et η sont sur la même orbite, s'il existe x dans $\mathscr{G}$ tel que $e^x \cdot \xi = \eta$.

Lorsque, V est maximale, Kirillov a montré que la classe d'équivalence de $\pi_{(\xi,V)}$ ne dépend que de l'orbite de ξ.

Rappelons enfin le résultat de G. Métivier [13] dans le cas du rang 2, qui étend (dans le cas particulier des opérateurs invariants à gauche homogènes sur un groupe nilpotent) des résultats de F. Trèves [19] et D. Tartakoff [18].

Sous l'hypothèse suivante:

$$\text{Pour tout } \eta \text{ dans } \mathscr{G}_2^* \mid 0,\ B_\eta \text{ restreint à } \mathscr{G}_1 \times \mathscr{G}_1 \text{ est non dégénérée.} \tag{H}$$

G. Métivier démontre le:

THÉORÈME 1.2. *Soit G vérifiant* (H) *et P dans* $\mathscr{U}_m(\mathscr{G})$. *Il y a équivalence entre*:

(i) *P est hypoelliptique analytique*;

(ii) *P est hypoelliptique* C^∞;

(iii) *pour toute représentation* π *dans G (ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires de G) non triviale,* $\pi(P)$ *est injectif dans* $\mathscr{S}_\pi$;

(iv) *pour toute représentation* π *dans* $\hat{G}$, $\pi(P)$ *est injectif dans* E_π *(espace des vecteurs entiers de* π, cf. *Section* 6).

Lorsque (H) n'est pas vérifiée, il est montré dans [12, 18] qu'il n'y a pas d'opérateurs hypoanalytiques homogènes d'ordre 2 sur un groupe nilpotent de rang 2, ce qui généralisait des résultats plus anciens de [1]. Pour des opérateurs homogènes d'ordre m ($m > 2$), on faisait apparaître dans [8] des conditions nécessaires portant sur des représentations *non-unitaires* de G, conditions dont on peut soupçonner qu'elles ne sont jamais satisfaites pour des opérateurs hypoelliptiques. Ce dernier point est un problème de théorie spectrale (posé sous un angle un peu différent dans [14]) qui est étudié dans [15] par Pham The Lai et D. Robert qui obtiennent des résultats partiels. L'objet de cet article est de développer les considérations de [8]. On obtiendra comme corollaires les résultats suivants:

THÉORÈME 1.3. *Il n'y a pas d'opérateurs hypoanalytiques dans* $\mathscr{U}_m(\mathscr{G})$ *si* $\mathscr{G}$ *n'est pas stratifié (i.e., si* $\mathscr{G}_1$ *n'engendre pas* $\mathscr{G}$ *par ses crochets).*

Le théorème (1.3) généralise le résultat bien connu que l'équation de la chaleur n'est pas hypoanalytique.

THÉORÈME 1.4. *Soit* $\mathscr{G}$ *une algèbre nilpotente stratifiée de rang r (avec* $r \geqslant 3$), *alors, si* $\dim \mathscr{G}_2 = 1$, *l'opérateur* $\sum_{i=1}^{p_1} X_i^2$ *(où* X_i *désigne une base de* $\mathscr{G}_1$) *n'est pas hypoanalytique.*

L'idée de la démonstration de ce type de résultats est conceptuellement assez simple: supposons qu'on ait trouvé une représentation fortement continue π dans un espace de Banach $\mathscr{H}_\pi$, irréductible, non dégénèrée sur $\exp \mathscr{G}^s$ $(1 < s \leqslant r)$ et v dans E_π non nul et vérifiant:

$$\pi(P)v = 0, \tag{1.8}$$

$$\|\pi(\delta_\lambda g)v\|_{\mathscr{H}_\pi} \leqslant Ce^{A\lambda^p}, \tag{1.9}$$

avec $p < s$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et g variant dans un voisinage V compact de e.

Alors la fonction C^∞ définie sur V par:

$$\tilde{u}(g) = \int_0^{+\infty} l(\pi(\delta_\lambda g)v)\, e^{-2A\lambda^p}\, d\lambda \tag{1.10}$$

(où l est une forme linéaire continue sur $\mathscr{H}_\pi$ telle que $l(v) \neq 0$) n'est pas analytique. L'introduction de ce type de fonctions pour contredire l'hypoellipticité se trouve dans [16].

L'objet de cet article est de construire de telles représentations. Ces représentations seront associées, par analogie à la théorie de Kirillov, à certains éléments de $\mathscr{G}^*_{\mathbb{C}}$ et à deux éléments situés sur la même orbite dans $\mathscr{G}^*_{\mathbb{C}}$ par l'action du groupe complexifié $G_{\mathbb{C}}$, on associera des représentations équivalentes en tant que représentations dans l'espace des *vecteurs entiers*. En fait, nous ne savons faire cette construction que dans des cas particuliers.

L'article est organisé comme suit:

Au § 2, on étudie une classe de représentations non unitaires.

Au § 3, on démontre le théorème 1.3.

Au § 4, on étudie l'action du groupe complexifié $G_{\mathbb{C}}$ sur la classe introduite au Section 1.

Au § 5, on démontre le théorème 1.4.

Au § 6, on rapelle des résultats de R. Goodmann et on démontre un théorème sur les vecteurs entiers.

2. Une Classe de Représentations non Unitaires

Soit ξ dans $\mathscr{G}^*$, V une sous-algèbre isotrope graduée dans $\mathscr{G}$ et on suppose que V contient $\mathscr{G}^2$. Soit S un supplémentaire gradué de V dans $\mathscr{G}$. S est un bon supplémentaire et d'après (1.5), on a:

$$e^x \cdot e^a = e^{v(x,a)}\, e^{\sigma(x,a)} \qquad \text{avec} \quad v(x,a) \in V, \sigma(x,a) \in S. \tag{2.1}$$

Remarquons qu'on a:

$$\begin{aligned} v(\delta_t x, \delta_t a) &= \delta_t(v(x,a)), \\ \sigma(\delta_t x, \delta_t a) &= \delta_t(\sigma(x,a)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Soit maintenant η dand $\mathscr{G}_{\mathbb{C}}^{*}$ tel que:

$$\eta - \xi/\mathscr{G}^2 = 0. \tag{2.3}$$

On désigne par p_V la projection sur V associée à la décomposition $\mathscr{G} = V \oplus S$. Sous l'hypothèse (2.3), il résulte de (2.1) que:

$$\langle \xi - \eta, v(x, a) \rangle = \langle \xi - \eta, p_V a \rangle \qquad \text{pour tout } a \text{ dans } \mathscr{G}. \tag{2.4}$$

On définit alors la représentation $\pi_{\eta,V}$ de G par une formule analogue à (1.6). Pour f dans $L^2(S)$ et a dans $\mathscr{G}$, on pose:

$$\pi_{(\eta,V)}(e^a) f(x) = e^{i\langle \eta, v(x,a) \rangle} f(\sigma(x, a)). \tag{2.5}$$

Si on remarque que $e^a \to e^{i\langle \eta - \xi, p_V a \rangle}$ est une représentation continue scalaire de G, il est clair que $\pi_{(\eta,V)}$ est une représentation continue de G dans $L^2(S)$ et qu'on a:

$$\pi_{(\eta,V)}(e^a) = e^{i\langle \eta - \xi, p_V a \rangle} \pi_{(\xi,V)}(e^a) \tag{2.6}$$

pour tout η dans $\mathscr{G}_{\mathbb{C}}^{*}$ vérifiant (23). Mais lorsque η n'est pas dans $\mathscr{G}^*$, cette représentation n'est pas unitaire!

On a la condition nécessaire suivante d'hypoanalyticité, généralisant la proposition 3.1 de [8].

PROPOSITION 2.1. *Soit $\mathscr{G}$ vérifiant* (1.1) *et P dans $\mathscr{U}_m(\mathscr{G})$. Soit (ξ, η, V, S) comme précédemment avec $\xi/\mathscr{G}^2 \neq 0$; on suppose que $\pi_{(\eta,V)}(P)$ est non injectif dans $\mathscr{S}(S)$, alors P n'est pas hypoelliptique analytique.*

Démonstration. On considère la fonction:

$$\tilde{u}(g) = \int_0^{+\infty} (\pi_{(\eta,V)}(\delta_\lambda g) u, u)_{L^2(S)} \, e^{-C\lambda} \, d\lambda, \tag{2.7}$$

où C est une constante réelle positive, qui sera déterminée ultérieurement, et u dans $\mathscr{S}(S)$ est une solution non nulle de:

$$\pi_{(\eta,V)}(P) u = 0. \tag{2.8}$$

Montrons tout d'abord que (2.7) a un sens. Compte tenu de (2.6) et (2.3), on a:

$$\| \pi_{(\eta,V)}(\delta_\lambda e^a) \|_{\mathscr{L}(L^2(S))} = e^{-\operatorname{Im}\langle \xi - \eta, p_V \delta_\lambda(a) \rangle}. \tag{2.9}$$

Par conséquent, pour tout compact K dans $\mathscr{G}$, il existe une constante C_K telle que, pour tout a dans K, on ait:

$$\| \pi_{(\eta,V)}(\delta_\lambda(e^a)) \|_{\mathscr{L}(L^2(S))} \leqslant e^{C_K \lambda}. \tag{2.10}$$

K étant fixé comme un voisinage compact de 0 dans $\mathscr{G}$, on choisit C strictement supérieur à C_K et la fonction $a \to \tilde{u}(e^a)$ est bien définie dans K et est C^∞.

Par conséquent $g \to \tilde{u}(g)$ est bien définie dans un voisinage de l'élément neutre de G. Montrons maintenant que $\tilde{u}(g)$ est solution de:

$$P\tilde{u}(g) = 0. \tag{2.11}$$

Remarquons tout d'abord que:

$$P(\pi_{(\eta,V)}(\delta_\lambda g)u, u) = 0. \tag{2.12}$$

Il suffit, pour le vérifier, de remarquer que, pour X dans $\mathscr{G}_i$ et f dans $\mathscr{S}(S)$, on a:

$$X(\pi_{(\eta,V)}(\delta_\lambda g)f, f) = \lambda^i(\pi_{(\eta,V)}(\delta_\lambda g)\, \pi_{(\eta,V)}(X) f, f) \tag{2.13}$$

et que, par conséquent, on a:

$$P(\pi_{(\eta,V)}(\delta_\lambda g)f, f) = \lambda^m(\pi_{(\eta,V)}(\delta_\lambda g)\, \pi_{(\eta,V)}(P) f, f). \tag{2.14}$$

En prenant $f = u$, on obtient (2.12). Par intégration, on obtient (2.11).

Montrons maintenant que l'application $a \to \tilde{u}(e^a)$ n'est pas analytique en 0. Par hypothèse, $\xi/\mathscr{G}^2 \neq 0$. Soit j_0 le plus grand entier ($\geqslant 2$) tel que $\xi/\mathscr{G}_{j_0} \neq 0$. Alors, on a $\xi/\mathscr{G}_{j_0+1} = 0$. Soit X dans $\mathscr{G}_{j_0}$ tel que $\langle \xi, X\rangle \neq 0$. On a:

$$\pi_{(\eta,V)}(X) = \pi_{(\xi,V)}(X) = i\langle \xi, X\rangle \neq 0.$$

D'où:

$$(X^k\tilde{u})(e) = i^k \, \|u\|^2 \langle \xi, X\rangle^k \int_0^{+\infty} \lambda^{j_0 k}\, e^{-C\lambda}\, d\lambda.$$

$(X^k\tilde{u})(e)$ croît comme $(j_0 k)!$, ce qui contredit l'hypoanalyticité de $\tilde{u}$ en l'élément neutre de G.

Remarque 2.2. Cette proposition s'appliquera aisément dans le cas des algèbres de Lie nilpotentes de rang de nilpotence 2 ou 3, car, dans ce cas, on peut toujours trouver des sous-algèbres isotropes maximales vérifiant les hypothèses: V graduée et $\mathscr{G}^2 \subset V$.

3. Première Application: Le Cas Non Stratifié

On se propose dans ce paragraphe de démontrer le théorème 1.3.

Soit $\mathscr{G}$ vérifiant (1.1) et soit $\mathscr{H}$ la sous-algèbre de $\mathscr{G}$ engendrée par $\mathscr{G}_1$. $\mathscr{H}$

est stratifiée et, si $\mathscr{G}$ n'est pas stratifiée, strictement incluse dans $\mathscr{G}$. $\mathscr{H}$ admet la décomposition en somme directe suivante:

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathscr{H}_r \qquad \text{avec} \quad \mathscr{H}_j \subset \mathscr{G}_j.$$

Soit j_0 le plus petit j tel que $\mathscr{H}_j$ soit inclus strictement dans $\mathscr{G}_j$. Soit ξ_{j_0} dans $\mathscr{G}_{j_0}^*$ tel que:

$$\xi_{j_0} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \xi_{j_0}/\mathscr{H}_{j_0} = 0. \tag{3.1}$$

On considère $\xi = (0,..., 0, \xi_{j_0}, 0, ..., 0)$ dans $\mathscr{G}^*$ et on prend $V = \mathscr{G}$, $\eta(\lambda) = (\lambda, 0,..., 0, \xi_{j_0}, 0,..., 0)$ dans $\mathscr{G}_{\mathbb{C}}^*$ avec λ dans $\mathscr{G}_{1\mathbb{C}}^*$.

On remarque que la représentation $\pi_{(\eta, V)}$ est scalaire. On distingue alors pour démontrer le théorème 1.3 deux cas:

(a) P n'est pas hypoelliptique. Dans ce cas, P n'est pas hypoanalytique. L'implication (i) $\Rightarrow$ (i) dans le théorème (1.2) est en effet vraie sans l'hypothèse sur le rang de nilpotence et sans l'hypothèse (H) (cf. [13]).

(b) Si P est hypoelliptique, alors le polynôme en λ:

$$\lambda \to \pi_{(\eta(\lambda), V)}(P)$$

est non identiquement constant.

Par conséquent, il existe λ dans $\mathscr{G}_{1\mathbb{C}}^*$ et donc η tel que $\pi_{(\eta, V)}(P)$ soit nul et donc non injectif. Le théorème (1.3) est une simple conséquence de la proposition (2.1).

4. Orbites "Complexes"

La proposition (2.1) fournit un moyen d'attaquer le problème de la non-hypoanalyticité mais deux questions se posent naturellement:

(Q_1) Les conditions ne sont pas intrisèques et dépendent en particulier du choix de V et S.

(Q_2) Quand on se restreint à la classe des opérateurs hypoelliptiques, y a-t-il des cas où la proposition (2.1) a un intérêt? En effet, l'injectivité de $\pi_{(\xi, V)}(P)$ dans $\mathscr{S}(S)$ pourrait impliquer l'injectivité de $\pi_{(\eta, V)}(P)$ pour tout η dans $\mathscr{G}_{\mathbb{C}}^*$ tel que $\xi - \eta/\mathscr{G}^2 = 0$. C'est par example le cas lorsqu'on considère les groups de rang 2 qui vérifient la condition (H) (cf. théorème 1.2).

L'objet de ce paragraphe est d'éclaircir un peu ces deux points.

On se place dans $\mathscr{G}_{\mathbb{C}}^*$. Soit $G_{\mathbb{C}}$ le groupe complexifié de G. On peut comme dans le cas réel définir la notion d'orbite (cf. (1.7)): On dira que ζ et ζ' dans $\mathscr{G}_{\mathbb{C}}^*$ sont sur la même orbite s'il existe x dans $\mathscr{G}_{\mathbb{C}}$ tel que:

$$\zeta = (\exp ad x)^* \zeta'. \tag{4.1}$$

Soit $\mathscr{G}$ stratifiée, ξ dans $\mathscr{G}^*$, tel que $\xi \diagup\!\!\!\!\wedge \mathscr{G}^2 \neq 0$ et on considère l'ensemble des η dans $\mathscr{G}^*_{\mathbb{C}}$ vérifiant:

$$\eta - \xi/\mathscr{G}^2 = 0. \tag{4.2}$$

Comme au paragraphe 2, on suppose qu'il existe une sous-algèbre V graduée contenant $\mathscr{G}^2$ et isotrope pour B_ξ. On pose alors:

$$V = V_1 \oplus \mathscr{G}^2 \qquad \text{avec} \quad V_1 \subset \mathscr{G}_1, \tag{4.3}$$

$$\mathscr{G} = S \oplus V_1 \oplus \mathscr{G}^2. \tag{4.4}$$

On considère $\tilde{V} = V_{1\mathbb{C}} \oplus \mathscr{G}^2$. Comme on ne s'intéresse qu'à la restriction à $\tilde{V}$ des η vérifiant (4.2) (seule cette restriction intervient dans la définition de $\pi_{(\eta,V)}$), on posera $\eta/\tilde{V} = (\eta_1, \xi_2)$ où ξ_2 désigne la restriction de ξ à $\mathscr{G}^2$ et où η_1 parcourt $V_1^{\mathbb{C}}{}^*$ (comptetenu de (4.4)).

Soit $R_1^{\mathbb{C}}$ l'ensemble des x dans $\mathscr{G}_1^{\mathbb{C}}$ qui sont orthogonaux à $\mathscr{G}^2$ pour B_ξ. Dans $V_1^{\mathbb{C}}{}^*$, on considère l'ensemble des points η_1 tels que $\eta_1 = adx)^*\xi \diagup\!\!\!\!\wedge V_1^{\mathbb{C}}$ avec x dans $R_1^{\mathbb{C}}$. C'est un sous-espace vectoriel de $V_1^{\mathbb{C}}{}^*$ qu'on notera E_1^*.

On fait la conjecture suivante:

CONJECTURE 4.1. *Soient P dans $\mathscr{U}_m(\mathscr{G})$ un opérateur hypoelliptique et (ξ, V, S) définis comme précédemment. Alors, pour tout η dans $\mathscr{G}^*_{\mathbb{C}}$ vérifiant* (4.2) *et*

$$\xi - \eta \diagup\!\!\!\!\wedge V_1^{\mathbb{C}} \in E_1^*, \tag{4.5}$$

$\pi_{(\eta,V)}(P)$ est injectif dans $\mathscr{S}(S)$.

La conjecture (4.1) *est un corollaire de la conjecture* (4.2) *suivante.* (4.6)

CONJECTURE 4.2. *Soit P dans $\mathscr{U}_m(\mathscr{G})$ un opérateur hypoelliptique et (ξ, V, S) définis comme précédemment. Alors, pour tout η dans $\mathscr{G}^*_{\mathbb{C}}$ vérifiant* (4.2), *on a*:

$$\operatorname{Ker} \pi_{(\eta,V)}(P) \cap \mathscr{S}(S) = \operatorname{Ker} \pi_{(\eta,V)}(P) \cap E_{\pi(\eta,V)}(S) \tag{4.7}$$

où $E_{\pi(\eta,V)}(S)$ est l'espace des vecteurs entiers de la représentation $\pi_{(\eta,V)}$.

On démontrera au § 6 la conjecture (4.2) dans certains cas particuliers, mais montrons maintenant l'affirmation (4.6).

Rappelons que les vecteurs entiers de la représentation $\pi_{(\eta,V)}$ sont les fonctions de $\mathscr{E}(S)$ qui vérifient:

> $u \in E_{\pi(\eta,V)}(S) \Leftrightarrow$ pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε telle que, pour tout k, pour tout $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k) \in [1, ..., \dim \mathscr{G}]^k$, on ait:
>
> $$\|\pi_{(\eta,V)}(X_\alpha)u\|_{L^2(S)} \leqslant C_\varepsilon \cdot \varepsilon^k \cdot k! \tag{4.8}$$

où $X_\alpha = X_{\alpha_1} \cdots X_{\alpha_k}$ et $\{X_i\}$ désigne une base de $\mathscr{G}$. Si on remarque que, compte-tenu de (4.2), on a pour tout a dans $\mathscr{G}$:

$$\pi_{(\eta,V)}(a) = i\langle \xi - \eta, p_V(a)\rangle + \pi_{(\xi,V)}(a),$$

on vérifie facilement que:

$$E_{\pi(\eta,V)}(S) = E_{\pi(\xi,V)}(S). \tag{4.9}$$

Précisons maintenant le lien entre $\pi_{(\eta,V)}$ et $\pi_{(\xi,V)}$ lorsque η vérifie (4.2) et (4.5). On renvoie pour plus de détails au § 2.3 de [9]. D'après la proposition (3.1) de [9], on a:

Pour tout a dans $\mathscr{G}$, tout h dans S, tout f dans $\mathscr{S}(S)$, on a:

$$\pi_{(\xi,V)}(e^h)\, \pi_{(\xi,V)}(a) f = \pi_{(\eta,V)}(a)\, \pi_{(\eta,V)}(e^h) f \tag{4.10}$$

avec $\eta = \exp(ad - h)^* \xi$.

Si f est dans $E_{\pi(\xi,V)}$, $\pi_{\xi,V}(e^h)$ est également bien défini pour h dans $S_{\mathbb{C}}$ (cf. [3]).

Pour h dans $R_1^{\mathbb{C}} \cap S^{\mathbb{C}}$, on a:

$$\eta = \exp(ad\, h)^* \xi = \xi + (ad\, h)^* \xi \tag{4.11}$$

et par conséquent η vérifie alors (4.2) et (4.5), de sorte que $\pi_{(\eta,V)}$ est bien définie.

L'identité (4.11) se prolonge alors pour h dans $R_1^{\mathbb{C}} \cap S^{\mathbb{C}}$ et f dans $E_{\pi(\xi,V)}(S)$.

Fin de la démonstration de l'affirmation (4.6). Soit u dans $\mathscr{S}(S)$ non nul tel que $\pi_{(\eta,V)}(P)u = 0$. Si la conjecture (4.2) est vraie, u est dans $E_{\pi(\eta,V)}(S)$ et comptetenu de (4.9) dans $E_{\pi(\xi,V)}(S)$.

Soit alors h dans $R_1^{\mathbb{C}}$ tel que $\eta = \xi + (ad\, h)^* \xi$. On peut écrire $R_1^{\mathbb{C}} = V_1^{\mathbb{C}} \oplus (R_1^{\mathbb{C}} \cap S^{\mathbb{C}})$ car $R_1^{\mathbb{C}}$ contient $V_1^{\mathbb{C}}$. Il existe alors $\tilde{h}$ dans $R_1^{\mathbb{C}} \cap S^{\mathbb{C}}$ tel que $\eta = \xi + (ad\, \tilde{h})^* \xi$. Alors, d'après (4.10) et (4.11), la fonction $v = \pi_{(\xi,V)}(e^{-h})u$ est une solution non triviale et dans $\mathscr{S}(S)$ de $\pi_{(\xi,V)}(P)v = 0$. Ceci contredit l'hypothèse d'injectivité de $\pi_{(\xi,V)}(P)$ dans $\mathscr{S}(S)$, qui résulte de l'hypothèse d'hypoellipticité (cf. théorème 1.1).

Remarque 4.3. Soit $\mathscr{G}$ une algèbre de Lie de rang de nilpotence 2. Soit ξ dans $\mathscr{G}^*$ tel que $\xi \diagup\!\!\!\wedge \mathscr{G}^2 \neq 0$. Dire que E_1^* est inclus strictement dans $V_{1\mathbb{C}}^*$ équivaut à dire que B_ξ a un radical non réduit à 0 dans $\mathscr{G}_1$. Ceci équivaut encore à dire que le groupe G associé ne vérifie pas la condition (H).

La philosophie de la conjecture (4.1) est que l'on peut espérer obtenir des résultats de non-hypoanalyticité, si l'on trouve des couples (ξ, V) avec V isotrope contenant $\mathscr{G}^2$ et tels que E_1^* soit inclus *strictement* dans $V_1^{\mathbb{C}*}$. On va expliciter ceci sur un exemple.

Remarque 4.4 (*Le cas du rang* 3).[1] Dans le cas des groupes de rang 2, on sait (cf. [8, 12] qu'il n'y a pas d'opérateurs hypoanalytiques dans $\mathscr{U}_2(\mathscr{G})$ lorsque la condition (H) n'est pas vérifiée. Si on s'intéresse à la non-hypoanalyticité d'opérateurs de $\mathscr{U}_2(\mathscr{G})$ sur des groupes de rang 3, on peut toujours se ramener au cas où $\mathscr{G}/\mathscr{G}_3$ vérifie la condition (H).

Dans ce cas, on a nécessairement:

$$\dim \mathscr{G}_2 \leqslant \dim \mathscr{G}_1 - 1. \tag{4.12}$$

Il résulte de (4.12) que, pour $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, avec $\xi_3 \neq 0$, l'ensemble R_1 est non réduit à 0. Maintenant, si $\xi_2 = 0$, on remarque que $V = R_1 \oplus \mathscr{G}^2$ est isotrope maximal. On a donc $V_1^{\mathbb{C}} = R_1^{\mathbb{C}}$ et B_ξ étant nul sur $\mathscr{G}_1 \times \mathscr{G}_1$, on a $E_1^* = 0$.

Par conséquent, dans le cas du rang 3, *on peut toujours trouver, si* $\mathscr{G}/\mathscr{G}_3$ *vérifie l'hypothèse* (H), *un couple* (ξ, V) *tel que* E_1^* *est inclus strictement dans* $V_1^{\mathbb{C}*}$.

Ce résultat reste vrai pour toutes les algèbres stratifiées de rang $\geqslant 3$ telles que $\mathscr{G}/\mathscr{G}^3$ vérifient l'hypothèse (H).

Remarque 4.5. Étude de la dépendance par rapport au supplémentaire. Soit k la dimension de S supplémentaire de V et soit $\tilde{S}$ un autre supplémentaire de V dans $\mathscr{G}$.

Soit $(e_i)_{i=1,\ldots,k}$ une base de S. On peut choisir une base $(\tilde{e}_i)$ de $\tilde{S}$ de telle sorte que:

$$e_i = \tilde{e}_i + v_i \qquad \text{avec } v_i \text{ dans } V. \tag{4.13}$$

Pour $x = (x_1, \ldots, x_k)$ dans $\mathbb{R}^k$, on pose:

$$x_S = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i, \tag{4.14}$$

$$x_{\tilde{S}} = \sum_{i=1}^{k} x_i \tilde{e}_i. \tag{4.15}$$

On a:

$$\begin{aligned} e^{x_S} e^a &= e^{v(x,a)}\, e^{\sum_i \sigma_i(x,a) e_i}, \\ e^{x_{\tilde{S}}} e^a &= e^{\tilde{v}(x,a)}\, e^{\sum_i \tilde{\sigma}_i(x,a)\tilde{e}_i}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

On veut comparer les deux représentations $\pi_{\eta,V,S}$ et $\pi_{\eta,V,\tilde{S}}$ définies dans $L^2(\mathbb{R}^k)$ respectivement par:

$$\begin{aligned} (\pi_{\eta,V,S}(e^a)f)(x) &= e^{i\langle \eta, v(x,a)\rangle} f(\sigma(x,a)), \\ (\pi_{\eta,V,\tilde{S}}(e^a)f)(x) &= e^{i\langle \eta, \tilde{v}(x,a)\rangle} f(\tilde{\sigma}(x,a)). \end{aligned} \tag{4.17}$$

[1] Cette remarque est le fruit de discussions avec G. Métivier.

Considérons $e^{xs}\, e^{-x\tilde{s}}$, on a, d'après (4.13):

$$e^{xs}\, e^{-x\tilde{s}} = e^{\varphi(x)} \qquad \text{avec} \quad \varphi(x) \in V. \tag{4.18}$$

De même:

$$e^{(\sigma(x))s}\, e^{-(\sigma(x))\tilde{s}} = e^{\varphi(\sigma(x))}. \tag{4.19}$$

On a:

$$\tilde{\sigma}(x, a) = \sigma(x, a). \tag{4.20}$$

En effet, si a s'écrit sous la forme:

$$a = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i + w_i \qquad \text{avec } w_i \text{ dans } V,$$

a s'écrit également:

$$a = \sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{e}_i + \tilde{w}_i \qquad \text{avec } \tilde{w}_i \text{ dans } V,$$

$$\tilde{w}_i = w_i + a_i v_i,$$

et on vérifie aisément que:

$$\sigma_i(x, a) = (x_i + a) = \tilde{\sigma}_i(x, a).$$

On montre alors que:

$$e^{\varphi(x)}\, e^{\tilde{v}(x,a)} = e^{v(x,a)}\, e^{\varphi(\sigma(x,a))}. \tag{4.21}$$

En effet

$$\begin{aligned} e^{xs}\, e^{a} &= e^{\varphi(x)}\, e^{x\tilde{s}}\, e^{a} \\ &= e^{\varphi(x)}\, e^{\tilde{v}(x,a)}\, e^{(\sigma(x,a))\tilde{s}} \\ &= e^{\varphi(x)}\, e^{\tilde{v}(x,a)}\, e^{-\varphi(\sigma(x,a))}\, e^{\sigma(x,a)s} \end{aligned}$$

et on conclut d'après (4.16).

Soit U la transformation définie a priori dans $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^k)$,

$$f \to e^{i\langle \eta, \varphi(x)\rangle} f = Uf.$$

On déduit de (4.21) l'identité:

$$\pi_{(\eta, V, s)}(e^a)\, Uf = U\pi_{(\eta, V, \tilde{s})}(e^a) f. \tag{4.22}$$

Lorsque η est dans $\mathscr{G}^*$, il n'y a pas de problème. U est continu de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^k)$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^k)$, on a ainsi réalisé l'entrelacement entre $\pi_{\eta,V,S}$ et $\pi_{\eta,V,\tilde{S}}$ et les deux représentations sont unitairement équivalentes (résultat classique). Par contre, lorsque η est dans $\mathscr{G}^*_{\mathbb{C}}$, U n'est pas continu dans $\mathscr{S}(S)$. Supposons qu'on ait montré la:

CONJECTURE 4.6. *U est continu de $E_{\pi_{\eta,V,S}}$ dans $E_{\pi_{\eta,V,\tilde{S}}}$.*

Alors, on peut répondre à la question (Q_1). En effet, compte tenu de la conjecture 4.2, le noyau de Ker $\pi_{(\eta,V,S)}(P) \cap \mathscr{S}(S)$ est dans $E_{\pi_{\eta},V,S}$.

Nous démontrons cette conjecture dans des cas particuliers au § 6. Notons que la conjecture 4.6 dit simplement qu'on peut définir $\pi_{\eta,V}$ comme représentation dans l'espace des vecteurs entiers $E_{\pi_{(\eta,V)}}$ sans préciser le choix du supplémentaire.

5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.4

Il est clair que compte tenu des résultats précédents, on peut toujours se ramener au case où:

$$\mathscr{G} \text{ est stratifiée,} \tag{5.1}$$

$$\mathscr{G} \text{ est de rang } 3, \tag{5.2}$$

$$\dim \mathscr{G}_3 = 1 \tag{5.3}$$

et de par l'hypothèse du théorème on a:

$$\dim \mathscr{G}_2 = 1. \tag{5.4}$$

Soit ξ dans $\mathscr{G}^*$ et on suppose que:

$$\xi = (\xi_3, \xi_2, \xi_1) \qquad \text{avec} \quad \xi_2 = 0, \xi_3 \neq 0. \tag{5.5}$$

On prend alors $V = R_1 \oplus \mathscr{G}^2$ (où R_1 est l'orthogonal de $\mathscr{G}_2$ dans $\mathscr{G}_1$ pour B_ξ) et on vérifie facilement que V est isotrope maximale pour B_ξ. $\mathscr{G}$ étant stratifié, soit X_1 un champ de $\mathscr{G}_1$ tel que $[X_1, Y] \neq 0$ pour Y dans $\mathscr{G}_2$ non nul. X_1 n'est bien entendu pas dans R_1 et on a la décomposition en somme directe:

$$\mathscr{G}_1 = R_1 \oplus \lambda X_1. \tag{5.6}$$

Alors on a:

$$\begin{aligned}\exp(x_1 X_1) \exp &\left(a_1 X_1 + \sum_{i=2}^{p_1} a_i X_i + bY + cZ\right) \\ &= \exp(v(x_1, a, b, c)) \exp(\sigma(x, a, b, c))\end{aligned} \tag{5.7}$$

avec

$$\sigma(x, a, b, c) = (x_1 + a_1) X_1. \tag{5.8}$$

On voit alors aisément que $\pi_{(\xi,\nu)}$ donne sur les éléments de $\mathscr{G}_1$:

$$\pi_{(\xi,\nu)}(X_1) = \frac{d}{dx_1},$$

$$\pi_{(\xi,\nu)}(X_i) = i\langle \xi_1, X_i\rangle + i\frac{\alpha_i}{2}x_1^2, \qquad i = 2,..., p_1.$$

Les α_i sont réels et l'un deux (par exemple α_2) est différent de zéro (hypothèse $\mathscr{G}$ stratifiée).

On pose $\eta_i = \langle \xi, X_i\rangle$ pour $i = 2,..., p_1$ et on a, pour $P = \sum_{i=1}^{p_1} X_i^2$:

$$\pi_{(\xi,\nu)}(P) = \partial_{x_1}^2 + \sum_{i=2}^{p_1} \left(i\eta_i + i\frac{\alpha_i}{2}x_1^2\right)^2. \tag{5.9}$$

Compte tenu de la proposition (2.1), on est ramené au problème suivant pour démontrer la non-hypoanalyticité de P: Existe-t-il $\eta_i \in \mathbb{C}$ $(i = 2,..., p_1)$ tel que l'opérateur:

$$\partial_{x_1}^2 + \sum_{i=2}^{p_1} \left(i\eta_i + i\frac{a_i}{2}x_1^2\right)^2 \tag{5.10}$$

soit non injectif dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. α_2 étant non nul, il existe une matrice orthogonale réelle P dans $O(p_1 - 1)$ telle que, si l'on pose $\eta' = P\eta$, on ait pour un $b \neq 0$:

$$\pi_{(\xi_3,0,\eta,\nu)}(P) = \partial_{x_1}^2 + \left(i\frac{b}{2}x_1^2 + i\eta_2'\right)^2 + \sum_{j=3}^{p_1} (i\eta_j')^2. \tag{5.11}$$

On choisit $\eta_j' = 0$ pour $j = 3,..., p_1$. On est ramené ainsi à la question: Existe-t-il η_2' complexe tel que $\partial_{x_1}^2 - ((b/2)x_1^2 + \eta_2')^2$ soit non injectif dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$?

La réponse est oui grâce à un résultat de Pham The Lai et D. Robert [15, Chap. III). Ceci termine la démonstration du théorème 1.4.

Remarque 5.1. Si dim $\mathscr{G}_1$ est supérieur ou égal à 3, on peut conclure plus directement pour (5.10) en prenant $\eta_2' = \eta_4' = \cdots = \eta_{p_1}' = 0$ et η_3' tel que $\eta_3'^2$ soit valeur propre de $\partial_{x_1}^2 - ((b/2)x_1^2)^2$.

Remarque 5.2. Par le même type de raisonnement, on peut montrer que, si dim $\mathscr{G}_2 = p_2$, si on désigne par n_2 la dimension de l'espace des polynômes homogènes de degré 2 à p_2 variables et si de plus $p_1 - p_2 > n_2$, l'opérateur

$\sum_{j=1}^{p_1} X_j^2$ n'est pas hypoelliptique analytique. On se ramène en effet au problème de théorie spectrale suivant: avec $k \leqslant p_2$;

$$\partial_{x_1}^2 + \sum_2^k (\partial x_j + iP_j(x_1,..., x_k))^2 - \sum_{k=1}^{p_1 - 1} (P_j(x_1,..., x_k))^2$$

admet-il des valeurs propres dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^k)$? Pour montrer ce résultat, on vérifie que cet opérateur est essentiellement autoadjoint (Proposition 5.1 de [4]) et que son domaine est d'injection compacte dans L^2. Le deuxième point résulte du théorème 5.1 de [4].

6. Vecteurs Entiers et Vecteurs Gevrey

6.1. *Rappels de résultats de R. Goodman* (cf. [3, 5])

Si π est une représentation continue de G dans un espace de Banach $\mathscr{H}_\pi$, on désigne par $\mathscr{S}_\pi$ l'espace des vecteurs C^∞ de π, i.e., l'espace des vecteurs v dans $\mathscr{H}(\pi)$ tels que la fonction à valeurs dans $\mathscr{H}_\pi$: $g \to \pi(g)v$ soit C^∞ sur G.

Si $(X_1,..., X_p)$ désigne une base de $\mathscr{G}$, on peut munir $\mathscr{E}_\pi$ d'une famille de semi-normes ρ_k définie par:

$$\rho_k(v) = \sup_{\substack{\alpha_j \in [1,...,p] \\ j=1,...,k}} \|\pi(X_\alpha)v\|_{\mathscr{H}_\pi} \qquad \text{où } X_\alpha = X_{\alpha_1} \cdots X_{\alpha_k}. \tag{6.1.1}$$

Muni de cette famille de semi-normes, $\mathscr{S}_\pi$ est un espace de Fréchet. Lorsque G est nilpotent connexe, simplement connexe et si π est une représentation unitaire irréductible dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, alors on sait que $\mathscr{S}_\pi = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

On désigne par $\mathscr{O}_\pi$ l'espace des vecteurs analytiques de π, i.e., l'espace des vecteurs v dans $\mathscr{H}_\pi$ tels que la fonction à valeurs dans $\mathscr{H}_\pi$: $g \to \pi(g)v$ soit analytique sur G.

On sait qu'un vecteur $C^\infty v$ est analytique si et seulement si:

$$E_s(v) \overset{\text{def}}{\equiv} \sum_{n=0}^\infty \frac{s^n}{n!} \rho_n(v) < \infty \qquad \text{pour un } s > 0. \tag{6.1.2}$$

On désigne par E_πl'espace des vecteurs entiers de π, i.e., le sous-espace des vecteurs analytiques v tels que $E_s(v)$ soit borné pour tout s. Une définition équivalente des vecteurs entiers est donnée en (4.8).

Dans le cas où G est le groupe associé à $\mathscr{G}$ avec $\mathscr{G}$ vérifiant (1.1) et si on désigne par $G_\mathbb{C}$ le groupe associé à $\mathscr{G}_\mathbb{C}$ par l'application exponentielle, la représentation $g \to \pi(g)v$ de G dans $\mathscr{H}_\pi$ se prolonge en une représentation holomorphe de $G_\mathbb{C}$ dans E_π.

EXEMPLE 6.1.1. Cas du rang 2 (cf. [3, 8], 13]). Soit $\eta \in \mathscr{G}_2^* \mid 0$, soit R_η le radical dans $\mathscr{G}_1$ de B_η. Soit $\tilde{S}_\eta$ un supplémentaire de R_η et ζ un élément de R_η^*.

Soit V une sous-algèbre isotrope maximale contenant $\mathscr{G}_2 \oplus R_\eta$. On pose:

$$V = \mathscr{G}_2 \oplus R_\eta \oplus I_\eta, \tag{6.1.3}$$

$$\tilde{S}_\eta = I_\eta \oplus S_\eta, \tag{6.1.4}$$

$$\mathscr{G} = \mathscr{G}_2 \oplus R_\eta \oplus I_\eta \oplus S_\eta, \tag{6.1.5}$$

$$\mathscr{G}^* = \mathscr{G}_2^* \oplus R_\eta^* \oplus I_\eta^* \oplus S_\eta^*. \tag{6.1.6}$$

On considère la représentation $\pi_{(\eta,\zeta),V}$ correspondant à l'élément ξ de $\mathscr{G}^*$ défini par $\xi = (\eta, \zeta, 0, 0)$ (dans la décomposition 6.1.6). Alors il existe une base de $\mathscr{G}$ dans laquelle la représentation dérivée de $\pi_{(\eta,\zeta)}$ s'écrire sous la forme suivante:

$$\pi_{(\eta,\zeta)}(X_j) = \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad j = 1,\dots, l,$$

$$\pi_{(\eta,\zeta)}(X_j) = ix_j, \qquad j = l+1,\dots, 2l, \qquad \text{où } 2l \text{ est le rang de } B_\eta \text{ restreint à } \mathscr{G}_1$$

$$\pi_{(\eta,\zeta)}(X_j) = i\zeta_j, \qquad j = 2l+1,\dots, p_1,$$

$$\pi_{(\eta,\zeta)}(Y_1) = i,$$

$$\pi_{(\eta,\zeta)}(Y_j) = 0, \qquad j = 2,\dots, p_2.$$

$\pi_{(\eta,\zeta)}$ est une représentation dans $L^2(\mathbb{R}^l)$ et l'on a:

$$\begin{aligned} &\mathscr{S}_{\pi(\eta,\zeta)} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^l) \\ &E_{\pi(\eta,\zeta)} = \{u \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^l), \forall \varepsilon, \exists C_\varepsilon \text{ tel que } \forall \alpha \in \mathbb{N}^l, \forall \beta \in \mathbb{N}^l, \\ &\qquad \|\partial_x^\alpha x^\beta u\|_{L^2} \leqslant C_\varepsilon \varepsilon^{|\alpha|+|\beta|}(|\alpha| + |\beta|)!\}. \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

La caractérisation (6.1.7) résulte de la démonstration du théorème (6.2) de [3].

EXEMPLE 6.1.2. Cas du rang 3. On reprend les notations du Section 5 et les hypothèses (5.1) à (5.5). On vérifie que pour tout ξ_1 dans $\mathbb{C}^{p_1}$, on a:

$$\begin{aligned} &\mathscr{S}_{\pi(\xi_1,0,\xi_3)} = \mathscr{S}(\mathbb{R}), \\ &E_{\pi(\xi_1,0,\xi_3)} = \{u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \forall \varepsilon, \exists C_\varepsilon \\ &\qquad \text{tel que } \|\partial_{x_1}^\alpha x_1^{2\beta} u\|_{L^2} \leqslant C_\varepsilon \varepsilon^{|\alpha|+|\beta|}(|\alpha| + |\beta|)!\}. \end{aligned}$$

6.2. *Vecteurs Gevrey* (cf. [5])

Pour étudier la conjecture (4.2), il s'introduit naturellement des sous-classes de vecteurs entiers qui ont été considérées par R. Goodman [5]. Dans le cas du rang 2, G. Métivier en fait un usage important dans [13].

Soit $\mathscr{G}$ vérifiant (1.1), soit $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ une base de $\mathscr{G}$ adaptée à la graduation, i.e., telle que:

$$\begin{array}{ll} X_1,\dots, X_p & \text{forment une base de } \mathscr{G}_1, \\ X_{p_1+1},\dots, X_{p_1+p_2} & \text{forment une base de } \mathscr{G}_2, \\ \vdots & \\ X_{\sum_{j=1}^{r-1} p_j+1},\dots, X_p & \text{forment une base de } \mathscr{G}_r. \end{array}$$

Pour $i = 1,\dots, p$, w_i est défini par $\delta_t(X_i) = t^{w_i}X_i$. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^p$ on pose:

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \sum \alpha_i, \\ \|\alpha\| &= \sum w_i\alpha_i. \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

DEFINITION 6.2.1 (cf. définition 4.1 de [5]). Si π est une représentation fortement continue de G, on définit pour tous s strictement positif, E^s_π comme l'ensemble des vecteurs $C^\infty v$ tels qu'il existe C et R tels que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^p$, on ait:

$$\|\pi(X^\alpha)v\| \leqslant C\alpha!\, R^{|\alpha|}\, \|\alpha\|^{-\|\alpha\|/s} \tag{6.2.2}$$

où $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_p^{\alpha_p}$.

Il est montré dans [5] les résultats suivants: E^s_π est le sous-espace des vecteurs v dans E_π qui vérifient:

$$\|\pi(g)v\| \leqslant C\, e^{A|g|^s} \tag{6.2.3}$$

pour des constantes C et A convenables indépendantes de $g \in G_{\mathbb{C}}$. ($|g|$ désigne la norme homogène de g, c'est-à-dire une norme telle que $|\delta_t g| = t\,|g|$.)

Si s est strictement inférieur à r (rang de nilpotence de $\mathscr{G}$) et si π est non dégénérée sur $\exp \mathscr{G}_r$, alors E^s_π est réduit à 0.

EXEMPLE 6.2.2. Cas du rang 2. Avec les notations de l'exemple 6.1.1, on obtient:

$$\begin{aligned} E^s_{\pi(\eta,\zeta)} = \{&u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^l), \exists C, R, \forall \alpha \in \mathbb{N}^l, \forall \beta \in \mathbb{N}^l, \\ &\|\partial_x^\alpha x^\beta u\| \leqslant C(|\alpha| + |\beta|)!\, (|\alpha| + |\beta|)^{-(|\alpha|+|\beta|)/s} R^{|\alpha|+|\beta|}\} \end{aligned}$$

ou

$$E^s_{\pi(\eta,\xi)} = \{u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^l), \exists C, R, \forall \alpha \in \mathbb{N}^l, \forall \beta \in \mathbb{N}^l,$$
$$\|x^\beta \partial_x^\alpha u\| \leqslant C(|\alpha| + |\beta|)!\,(|\alpha| + |\beta|)^{-(|\alpha|+|\beta|)/s} R^{|\alpha|+|\beta|}\}.$$

Lorsque $s = 2$, on obtient:

$$E^2_{\pi(\eta,\xi)} = \{u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^l), \exists C, R, \forall \alpha \in \mathbb{N}^l, \forall \beta \in \mathbb{N}^l,$$
$$\|x^\beta \partial_x^\alpha u\| \leqslant C((|\alpha| + |\beta|)!)^{1/2} R^{|\alpha|+|\beta|}\}.$$

EXEMPLE 6.2.3. Cas du rang 3. Dans le cadre de l'exemple 6.1.2, on obtient:

$$E^s_{\pi(\xi_3,0,\xi_2)} = \{u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \exists C, R, \forall p, \forall q, \forall r, \|\partial_{x_j}^p x_1^{2q+r} u\|$$
$$\leqslant C(p!)(q!)(r!)(p+q+2r)^{-(p+q+2r)/s} R^{p+q+2r}\}.$$

Lorsque r est égal à 3 (rang de nilpotence du groupe), on a:

$$E^3_{\pi(\xi_3,0,\xi_2)} = \{u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \exists C, R, \forall p, \forall q,$$
$$\|\partial_{x_1}^p x_1^q u\| \leqslant C((2p+q)!)^{1/3} R^{2p+q}\}.$$

Comme le signale R. Goodman [5] ces espaces ont été considérés par Gelfand et Shilov [2].

6.3. *Démonstration de la conjecture* 4.2 *dans deux cas particuliers*

Nous démontrons la conjecture dans deux cas particuliers. Le premier cas correspond à l'exemple 6.1.1 (et 6.2.2), i.e., le cas où $\mathscr{G}$ est de rang 2; le deuxième cas correspond à l'exemple 6.1.2 (et 6.2.3), i.e., le cas où $\mathscr{G}$ est de rang 3 et où les hypothèses (5.1) à (5.5) sont vérifiées. Compte-tenu des deux paragraphes précédents, la conjecture (4.2) se déduit de la proposition suivante:

PROPOSITION 6.3.1. *Soit ρ un entier non nul et L l'opérateur $L = \sum_{\rho|r|+|s|\leqslant \rho m} a_{r,s} \partial_t^r t^s$ sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^l)$ tel que l'on ait:*

$$\left| \sum_{\rho|r|+|s|=\rho m} a_{rs} \tau^r t^s \right| \neq 0 \qquad pour \quad |\tau| + |t| \neq 0. \tag{6.3.1}$$

Alors, si u dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^l)$ vérifie $Lu = 0$, il existe des constantes C et R telles que, $\forall p \in \mathbb{N}^l$, $\forall q \in \mathbb{N}^l$, on ait:

$$\|\partial_t^p t^q u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C R^{\rho|p|+|q|} ((\rho|p| + |q|)!)^{1/\rho+1}. \tag{6.3.2}$$

Cette proposition est démontrée dans le cas $\rho = l = 1$ par G. Métivier dans [13, Proposition 1.1]. La démonstration du cas général n'est pas fondamentalement différente, comme nous l'a suggéré G. Métivier. On trouvera des résultats voisins de ceux-ci, mais insuffisants pour notre propos dans [17].

On sait d'après Grušin [6] que L est un opérateur à indice de l'espace:

$$\mathscr{H}^m_\rho(\mathbb{R}^l) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^l), \partial_t^p t^q u \in L^2(\mathbb{R}^l) \text{ pour } \rho\,|p| + |q| \leqslant \rho m\}$$

dans $L^2(\mathbb{R}^l)$ et que le noyau de L dans $L^2(\mathbb{R}^l)$ est égal au noyau dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^l)$. On en déduit l'estimation suivante: Il existe C_0 telle que $\forall u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^l)$:

$$\|u\|_{\mathscr{H}^m_\rho} \leqslant C_0(\|Lu\|_0 + \|u\|_0) \tag{6.3.3}$$

où on a posé

$$\|u\|_{\mathscr{H}^m_\rho} = \operatorname*{Max}_{\rho|p|+|q| \leqslant \rho m} \|\partial_t^p t^q u\|_0.$$

On démontre l'inégalité (6.3.2) par récurrence sur $k = \rho\,|p| + |q|$. (6.3.2) est clairement vérifiée pour C et R convenables, assez grand, pour $k \leqslant \rho m$. On suppose donc (6.3.2) démontrée pour $\rho\,|p| + |q| \leqslant k$ et on veut montrer que (6.3.2) est vérifiée pour $\rho\,|p| + |q| \leqslant k+1$ avec $k+1 > \rho m$. Pour $\rho\,|p| + |q| = k+1$, on peut toujours écrire:

$$\partial_t^p t^q = \partial_t^{p''} t^{q''}\, \partial_t^{p'} t^{q'}$$

avec

$$\rho\,|p''| + |q| = \rho m, \qquad \rho\,|p'| + |q'| = (k+1) - \rho m < k.$$

Si $|p| = p_1 + \cdots + p_l \geqslant m$, on choisit $p'' = (p_1'',..., p_l'')$ avec $p_j'' \leqslant p_j$ et $|p''| = m$ et $q'' = 0$.

Si $|p| < m$, on prend $p'' = p$ et $q'' = (q_1'',..., q_l'')$ tel que $q_j'' \leqslant q_j$ et $|q''| = qm - \rho\,|p|$.

On déduit alors de (6.3.3) la majoration:

$$\|\partial_t^p t^q u\| \leqslant C_0(\|L\partial_t^{p'} t^{q'} u\|_0 + \|\partial_t^{p'} t^{q'} u\|_0). \tag{6.3.4}$$

Remarquons maintenant qu'on a:

$$L\partial_t^{p'} t^{q'} u = [L, \partial_t^{p'} t^{q'}]\, u. \tag{6.3.5}$$

Évaluons maintenant le terme entre crochets. On a à examiner un nombre fini et indépendant de (p, q) de termes de la forme $[\partial_t^r t^s, \partial_t^{p'} t^{q'}]$ avec $\rho\,|r| + s \leqslant \rho m$. On a:

$$[\partial_t^r t^s, \partial_t^{p'} t^{q'}] = \partial_t^r [t^s, \partial_t^{p'}]\, t^{q'} + \partial_t^{p'''} [\partial_t^r, t^{q'}]\, t^s \tag{6.3.6}$$

et on vérifie que:

$$[t^s, \partial_t^{p'}] = \sum_{\substack{|j|\geqslant 1\\ j_i\leqslant \inf(p_i', s_i)\\ i=1,\ldots,l}} \binom{s}{j} (-1)^{|j|} \frac{p'!}{(p'-j)!} \partial_t^{p'-j} t^{s-j} \tag{6.3.7}$$

où on a posé $q! = q_1! \cdots q_l!$; $\binom{s}{j} = \binom{s_1}{j_1} \cdots \binom{s_l}{j_l}$. On déduit de (6.3.7) qu'il existe une constante C_1 indépendante de p' et de q' telle que:

$$\|\partial_t^r [t^s, \partial_t^{p'}] t^{q'} u\| \leqslant C_1 \operatorname*{Max}_{\substack{j_i\leqslant \inf(p_i', s_i)\\ |j|\geqslant 1}} \frac{p'!}{(p'-j)!} \|\partial_t^{p'+r-j} t^{s+q'-j} u\|. \tag{6.3.8}$$

De même, on vérifie que:

$$[\partial_t^r, t^{q'}] = \sum_{\substack{|j|\geqslant 1\\ j_i\leqslant \inf(q_i', r_i)}} \binom{q'}{j} (-1)^{j+1} \frac{r!}{(r-j)!} \partial_t^{r-j} t^{q'-j}. \tag{6.3.9}$$

On déduit de (6.3.9) qu'il existe une constante C_2 indépendante de p' et q' telle que:

$$\|\partial_t^{p'} [\partial_t^r, t^{q'}] t^s u\| \leqslant C_2 \operatorname*{Max}_{\substack{j_i\leqslant \inf(q_i', r_i)\\ |j|\geqslant 1}} \frac{q'!}{(q'-j)!} \|\partial_t^{r+p'-j} t^{s+q'-j} u\|. \tag{6.3.10}$$

On applique maintenant l'hypothèse de récurrence; on a:

$$\begin{aligned} &\|\partial_t^r [t^s, \partial_t^{p'}]\, t^{q'} u\| \\ &\leqslant CC_1 \operatorname*{Max}_{\substack{j_i\leqslant \inf(p_i', s_i)\\ |j|\geqslant 1}} \frac{p'!}{(p'-j)!} \\ &\quad \times R^{\rho|p'+r-j|+|s+q|-j|}((\rho\,|p'+r|+|s+q'|-(\rho+1)\,|j|)!^{1/\rho+1}. \end{aligned} \tag{6.3.11}$$

On va montrer que, pour tout A, il existe $R(A)$ tel que, pour R supérieur à $R(A)$, on ait, en désignant par (M) le terme de droite de (6.3.11):

$$(\mathrm{M}) \leqslant ACR^{k+1}(k+1)!^{1/\rho+1}. \tag{6.3.12}$$

En effet, il existe C_3 indépendant de (p, q) telle que si R est supérieur à 1, on ait:

$$\begin{aligned} (\mathrm{M}) \leqslant CC_1 C_3 &\operatorname*{Max}_{1\leqslant |j|\leqslant \inf(|p'|, |s|)} \frac{|p'|!}{(|p'-j|)!} \\ &\times R^{k+1-(\rho+1)j'}((k+1)-(\rho+1)\,|j|)^{1/\rho+1}. \end{aligned}$$

Enfin, il existe C_4 tel que l'on ait:

$$(\mathrm{M}) \leqslant CC_1C_4R^k \max_{1 \leqslant l \leqslant \inf(|p'|,|s|)} \frac{|p'|!}{(|p'|-l)!} \times ((k+1)-(\rho+1)l)!^{1/\rho+1}.$$

On remarque maintenant qu'on a l'inégalité:

$$\frac{|p'|!}{(|p'|-l)!}((k+1)-(\rho+1)l)!^{1/\rho+1} \leqslant ((k+1)!)^{1/\rho+1}. \quad (6.3.13)$$

En effet, cette inégalité est équivalente à:

$$\frac{|p'|!^{\rho+1}}{(|p'|-l)!^{\rho+1}} \leqslant \frac{((k+1)!)}{((k+1)-(\rho+1)l)!}.$$

Elle résultera de la vérification de:

$$|p'|-l+1 \leqslant (k+1)-(\rho+1)l+1, \qquad \text{i.e.,} \quad |p'|+\rho l \leqslant k+1. \quad (6.3.14)$$

On remarque alors que, comme $l \leqslant \inf(|p'|, |s|)$, on a:

$$|p'|+\rho l \leqslant \rho|p'|+|s| \leqslant \rho|p'|+|q'|+\rho m \leqslant k+1$$

ce qui montre (6.3.14) et par conséquent (6.3.13). On choisit alors $R(A)$ tel que $R(A) = \sup(1, C_1C_4/A)$ et on vérifie qu'on a bien alors (6.3.12).

On traite ensuite de la même manière le terme (6.3.10), on obtient alors qu'il existe R_0 tel que pour $R \geqslant R_0$ on ait:

$$\|[L, \partial_t^{p'}t^{q'}]u\| \leqslant \frac{C}{2C_0}R^{k+1}(k+1)^{1/\rho+1}.$$

L'autre terme de (6.3.4) se traitant aussi simplement, on voit qu'il existe R_1 tel que pour $R \geqslant R_1$ l'inégalité soit vérifiée pour $\rho|p|+|q| = k+1$. La proposition 6.3.1 est ainsi démontrée.

6.4. *Étude de la dépendance par rapport au supplémentaire: cas du rang 2*

On reprend dans ce paragraphe les notations de la remarque (4.5). On veut montrer que dans ce cas U est continu de $E_{\pi_\eta,V,S}$ dand $E_{\pi_\eta,V,\tilde S}$ (conjecture 4.6). Il facile de voir que les deux espaces $E_{\pi_\eta,V,S}$ et $E_{\pi_\eta,V,\tilde S}$ coïncident et correspondent à l'espace défini en (6.1.7). On écrit U sous la forme $U = U_1U_2$ avec $U_2 = e^{i\langle\xi,\varphi(x)\rangle}$, $U_1 = e^{i\langle\eta-\xi,\varphi(x)\rangle}$. U_2 (étant l'opérateur d'entrelacement entre $E_{\pi_\xi,V,S}$ et $R_{\pi_\xi,V,\tilde S}$) opère continûment de $\mathscr{S}_{\pi_\xi,V,S}$ dans $\mathscr{S}_{\pi_\xi,V,\tilde S}$ et de $E_{\pi_\xi,V,S}$ dans $E_{\pi_\xi,V,\tilde S}$. Comme $E_{\pi_\eta,V,S} = E_{\pi_\xi,V,S} = E_{\pi_\xi,V,\tilde S} = E_{\pi_\eta,V,\tilde S}$, on en déduit la continuité de U_2 de $E_{\pi_\eta,V,S}$ dans $E_{\pi_\eta,V,\tilde S}$. Considérons maintenant U_1. U_1 est le composé d'opérateurs de multiplications de la forme $e^{\alpha_i x_i}$ avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$. Il suffit donc de vérifier que $f \to e^{\alpha_i x_i} f$ est continu dans l'espace défini en (6.1.7). Ceci résulte de la proposition 2.2 de [3].

Remarque 6.4.1. Dans le cas de l'exemple (6.1.2), on obtiendrait le même résultat.

Par conséquent, dans ces deux cas, la condition figurant dans la proposition 2.1 ne dépend pas du choix du supplémentaire S. Dans le cas du rang 2, on peut montrer qu'elle ne dépend pas de V.

Remerciements

Nous tenons à remercier G. Métivier pour l'aide qu'il nous a apportée dans la rédaction de cet article particulièrement dans la démonstration de la proposition 6.3.1. Nous remercions également Pham The Lai et D. Robert qui ont bien voulu s'intéresser à notre problème et y répondre partiellement.

References

1. M. S. Baouendi and C. Goulaouic, Non analytic hypoellipticity for some degenerate elliptic operators, *Bull. Amer. Math. Soc.* **78** (1972), 483–486.
2. I. M. Gelfand and G. D. Šilov, "Generalized Functions, vol.2. Space of Fundamental Functions," Academic Press, New York, 1968.
3. R. Goodman, Analytic and entire vectors for representations of Lie Groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **143** (1969), 55–76.
4. R. Goodman, Elliptic and subelliptic estimates for operators in an envelopping Algebra, *Duke Math. J.* (1980).
5. R. Goodman, Holomorphic representations of nilpotent Lie groups, *Funct. Anal.* **31** (1979), 115–137.
6. V. V. Grušin, On a class of hypoelliptic operators, *Mat. Sb.* **83** (1970), 456–473 [*Math. USSR Sb* **12** (1972), 458–476].
7. B. Helffer, Opérateurs invariants sur une classe de groupes de Lie nilpotents de rang 2, Manuscrit, juillet 1978.
8. B. Helffer, Remarque sur la non-hypoanalyticité, Séminaire d'Analyse (février 1979), Université de Nantes, Département de Mathématiques.
9. B. Helffer and J. Nourrigat, Hypoellipticité pour des groupes nilpotents de rang 3, *Comm. Partial Differential Equations* **3** (1978), 643–743.
10. B. Helffer and J. Nourrigat, Caractérisation des opérateurs hypelliptiques homogènes invariants à gauche sur un groupe nilpotent gradué, *Comm. Partial Differential Equations* **4** (1979), 899–958.
11. A. A. Kirillov, Unitary representations of nilpotent Lie groups. *Usp. Math. Nauk* **17** (1962) 57–110 [Russian: *Math. Surveys* **17** (1962), 53–104].
12. G. Métivier, Une classe d'opérateurs non-hypoelliptiques analytiques, preprint et Séminaire Goulaouic-Schwartz, janvier 1979, École Polytechnique.
13. G. Métivier, Hypoellipticité analytique sur des groupes nilpotents de rang 2, *Duke Math. J.* **17** (1980).

14. O. A. OLEINIK AND E. V. RADKEVIC, On the analyticity of solutions of linear partial differential equations, *Math. Sb.* **90** (132), (1972) [*Math. USSR Sb.* **19** (1973)].
15. PHAM THE LAI AND D. ROBERT, Sur un problème aux valeurs propres non linéaires, séminaire d'Analyse (Avril 1979), Université de Nantes, département de Mathématiques et article à paraître.
16. L. P. ROTHSCHILD AND E. M. STEIN, Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups, *Acta Math.* **137** (1976), 248–315.
17. K. TANIGUCHI, On the hypoellipticity and the global analytic hypoellipticity of pseudo-differential operators, *Osaka J. Math.* **11** (1974), 221–238.
18. D. S. TARTAKOFF, The analytic hypoellipticity of $\Box_b$ and related operators on C. R. Manifolds, *Acta Math.* (1980).
19. F. TREVES, Analytic hypoellipticity of a class of pseudodifferential operators, *Comm. Partial Differential Equation* **3** (1978), 475–642.